Séminaire Informatique Scientifique & Mathématiques Appliquées
Lundi 31 mars 2025

Dérivation asymptotique de modèles diphasiques

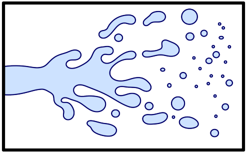
Nicolas Seguin

Équipe-projet Inria **Angus** (antenne Inria de l'Université de Montpellier)

Avec Matthieu Hillairet, Pierrick Le Vourc'h, Hélène Mathis, Khaled Saleh

Écoulements diphasiques

- Incidents avec vaporisation dans les centrales nucléaires
- Atomisation des jets pour les injecteurs spatiaux
- Écoulements de fluides dans des conduites



- Mélange immiscible de deux fluides (eau et air) ou deux phases (liquide et vapeur)
- Fluides compressibles (visqueux ou non, isothermes ou non...)
- Beaucoup d'interfaces et d'inclusions de formes complexes

⟶ **Description exacte** impossible (et inutile)

⟶ Application d'**opérateurs de moyenne** + **fermetures**

⟶ **Hiérarchie de modèles** suivant les échelles, les régimes...

(Couplage/adaptation dynamique des modèles...)

Dérivation de modèles moyennés

[Stewart, Wendroff 1984], [Drew, Passman 1998], [Ishii, Hibiki 2006]...

Méthodes de dérivation de modèles

Passages d'une phase à l'autre $\longrightarrow$ oscillations rapides

- Moyennes en temps ou en espace sur les oscillations
- Ajout d'aléa dans les équations et moyenne statistique
- Différentiation des variables lentes et rapides (développements WKB)

Par exemple :

1. Fonction caractéristique de la phase 1 : $\mathbf{1}_{\Omega_{\mathbf{1}}(t)}(x) \in \{0,1\}$
2. ... application d'une moyenne ...
3. Fraction volumique de la phase 1 : $\alpha_{\mathbf{1}}(t,x) \in [0,1]$

Dérivation de modèles moyennés

[Stewart, Wendroff 1984], [Drew, Passman 1998], [Ishii, Hibiki 2006]...

Méthodes de dérivation de modèles

Passages d'une phase à l'autre $\longrightarrow$ oscillations rapides

- Moyennes en temps ou en espace sur les oscillations
- Ajout d'aléa dans les équations et moyenne statistique
- Différentiation des variables lentes et rapides (développements WKB)

Par exemple :

1. Fonction caractéristique de la phase 1 : $\mathbf{1}_{\Omega_1(t)}(x) \in \{0, 1\}$
2. ... application d'une moyenne ...
3. Fraction volumique de la phase 1 : $\alpha_1(t, x) \in [0, 1]$

Difficultés

- Pas de commutation des opérateurs de moyenne avec les non linéarités
- Éventuelle destruction des "bonnes" structures des modèles initiaux

Pas encore de procédure de dérivation totalement satisfaisante...

- Calculs et fermetures heuristiques
- Manque de généralité des approches rigoureuses

Un modèle moyenné heuristique "complet"

[Baer, Nunziato 1986], [Saurel, Abgrall 1999], [Gallouët, Hérard, S. 2004]...

$$
\begin{aligned}
&\partial_t \alpha_1 + V_\mathrm{I} \cdot \nabla_x \alpha_1 = S_1 \\
&\partial_t(\alpha_1 \rho_1) + \nabla_x \cdot (\alpha_1 \rho_1 u_1) = M_1 \\
&\partial_t(\alpha_1 \rho_1 u_1) + \nabla_x \cdot (\alpha_1 \rho_1 u_1 \otimes u_1) + \nabla_x p_1 - P_\mathrm{I} \nabla_x \alpha_1 = D_1 \\
&\partial_t(\alpha_1 \rho_1 E_1) + \nabla_x \cdot (u_1(\alpha_1 \rho_1 E_1 + p_1)) - P_\mathrm{I} V_\mathrm{I} \cdot \nabla_x \alpha_1 = H_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_t \alpha_2 + V_\mathrm{I} \cdot \nabla_x \alpha_2 = S_2 \\
&\partial_t(\alpha_2 \rho_2) + \nabla_x \cdot (\alpha_2 \rho_2 u_2) = M_2 \\
&\partial_t(\alpha_2 \rho_2 u_2) + \nabla_x \cdot (\alpha_2 \rho_2 u_2 \otimes u_2) + \nabla_x p_2 - P_\mathrm{I} \nabla_x \alpha_2 = D_2 \\
&\partial_t(\alpha_2 \rho_2 E_2) + \nabla_x \cdot (u_2(\alpha_2 \rho_2 E_2 + p_2)) - P_\mathrm{I} V_\mathrm{I} \cdot \nabla_x \alpha_2 = H_2
\end{aligned}
$$

avec

$$
\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \qquad
\begin{matrix} S_1 + S_2 = 0 & D_1 + D_2 = 0 \\ M_1 + M_2 = 0 & H_1 + H_2 = 0 \end{matrix}
$$

[Coquel, Hérard, Saleh, S. 2014] : modèle (plutôt) bien posé...

Asymptotics : [Kapila *et al.* 2001], [Flåtten, Lund 2011], [Lund 2012]...

Un petit état de l'art

Difficultés et besoins

- Définition des termes "convectifs"
  $\longrightarrow$ V_{I}, P_{I}, produits non conservatifs...
- Définition des termes sources
  $\longrightarrow$ S_k, M_k, Q_k, H_k, asymptotiques
- **Validité du modèle** (analyse & approximation, régimes...)

Un petit état de l'art

Difficultés et besoins

- Définition des termes "convectifs"
  $\longrightarrow$ V_{I}, P_{I}, produits non conservatifs. . .
- Définition des termes sources
  $\longrightarrow$ S_k, M_k, Q_k, H_k, asymptotiques
- **Validité du modèle** (analyse & approximation, régimes. . .)

Dérivation rigoureuse

Hillairet, Bresch, Burtea, Lagoutière, Gonin-Joubert. . .

1. Équations de Navier-Stokes avec oscillations pour le mélange
2. Fréquence des oscillations $\to +\infty$
3. Identification des EDP à la limite

$\longrightarrow$ Modèles de **Baer-Nunziato** 1D à une vitesse, visqueux et sans transition de phase

Un petit état de l'art

Difficultés et besoins

- Définition des termes "convectifs"
  $\longrightarrow$ V_{I}, P_{I}, produits non conservatifs...
- Définition des termes sources
  $\longrightarrow$ S_k, M_k, Q_k, H_k, asymptotiques
- **Validité du modèle** (analyse & approximation, régimes...)

Dérivation rigoureuse

Hillairet, Bresch, Burtea, Lagoutière, Gonin-Joubert...

1. Équations de Navier-Stokes avec oscillations pour le mélange
2. Fréquence des oscillations $\to +\infty$
3. Identification des EDP à la limite

$\longrightarrow$ Modèles de **Baer-Nunziato** 1D à une vitesse, visqueux et sans transition de phase

Points bloquants

- Un modèle unique pour le mélange initial
- Une seule vitesse
- Cas unidimensionnel
- Pas de transition de phase

Un petit état de l'art

Difficultés et besoins

- Définition des termes "convectifs"
  $\longrightarrow$ V_{I}, P_{I}, produits non conservatifs...
- Définition des termes sources
  $\longrightarrow$ S_k, M_k, Q_k, H_k, asymptotiques
- **Validité du modèle** (analyse & approximation, régimes...)

Dérivation rigoureuse

Hillairet, Bresch, Burtea, Lagoutière, Gonin-Joubert...

1. Équations de Navier-Stokes avec oscillations pour le mélange
2. Fréquence des oscillations $\to +\infty$
3. Identification des EDP à la limite

$\longrightarrow$ Modèles de **Baer-Nunziato** 1D à une vitesse, visqueux et sans transition de phase

Points bloquants

$\rightsquigarrow$ Un modèle unique pour le mélange initial

$\rightsquigarrow$ Une seule vitesse

$\rightsquigarrow$ Cas unidimensionnel

- Pas de transition de phase

Modèle d'écoulement à bulles
⟦Hillairet, Mathis, S., M2AN 2023⟧

- Fluide (liquide) compressible barotrope (Navier–Stokes) : $\rho_f(t,x)$, $\rho_f u_f(t,x)$

$$\begin{cases} \partial_t \rho_f + \operatorname{div}(\rho_f u_f) = 0 \\ \partial_t(\rho_f u_f) + \operatorname{div}(\rho_f u_f \otimes u_f) = \operatorname{div} \Sigma_f \end{cases}$$

- N Bulles sphériques compressibles $B_k(t) = \mathcal{B}(X_k(t), R_k(t))$, $k = 1, \dots, N$

$$u_k(\cdot, x) = \dot{X}_k + \omega_k \times (x - X_k) + \frac{\Lambda_k}{3}(x - X_k)$$

$\rightsquigarrow$ Équations différentielles sur $(X_k(t), R_k(t), \omega_k(t))$

- Tension de surface aux interfaces

$$\begin{cases} u_f = y_k \\ (\Sigma_f - \Sigma_k) n_k = \gamma_s n_k \end{cases} \quad \text{sur } \partial B_k$$

Rq. $\not\subset$ Équations de Navier-Stokes avec oscillations

Écoulements à bulles avec tension de surface

Modèle moyenné d'écoulement à bulles
[[Hillairet, Mathis, S., M2AN 2023]]

- Si $\gamma_s = 0$, on retrouve les travaux précédents
- Restriction au **cadre 1D**
- Asymptotiques quand $N \to +\infty$

$$\begin{aligned} |B_k| &\sim N^{-1}, && \text{volume des bulles} \to 0 \\ m_k &\sim N^{-1}, && \text{masse volumique du gaz "pertinente"} \\ d(B_k, B_{k+1}) &\sim N^{-1} && \text{distance entre les bulles} \to 0 \\ \gamma_s &\sim N^{-1}, && \text{tension de surface} \to 0 \end{aligned}$$

Représentation volumique des bulles

$$\chi_g^{(N)}(t,x) = \sum_{k=1}^{N} 1_{B_k(t)}(x)$$

Fonction de distribution des bulles en position et rayon

$$S_t^{(N)}(x,r) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \delta_{(X_k(t), NR_k(t))}(x,r)$$

Passage à la limite $N \to +\infty$

Approche volumique

De la fonction indicatrice $\chi_g^{(N)} \in \{0,1\}$ à la probabilité de présence $\bar{\alpha}_g \in [0,1]$:

$$\chi_g^{(N)} \rightharpoonup \bar{\alpha}_g \quad L^\infty - w^*$$

$\rightsquigarrow$ EDP sur $\bar{\alpha}_g$: $\partial_t \bar{\alpha}_g + \mathrm{div}_x(\bar{\alpha}_g \bar{u}) = \dfrac{\bar{\alpha}_g}{\mu_g} \left(\bar{\Sigma}_g + \mathrm{p}_g(\bar{\rho}_g) + \bar{\gamma}_s \bar{f}_g\right)$

Passage à la limite $N \to +\infty$

Approche volumique

De la fonction indicatrice $\chi_g^{(N)} \in \{0,1\}$ à la probabilité de présence $\bar{\alpha}_g \in [0,1]$:

$$\chi_g^{(N)} \rightharpoonup \bar{\alpha}_g \quad L^\infty - w^*$$

$\rightsquigarrow$ EDP sur $\bar{\alpha}_g$: $\partial_t \bar{\alpha}_g + \mathrm{div}_x(\bar{\alpha}_g \bar{u}) = \dfrac{\bar{\alpha}_g}{\mu_g}\left(\bar{\Sigma}_g + \mathrm{p}_g(\bar{\rho}_g) + \bar{\gamma}_s \bar{f}_g\right)$

Approche "cinétique"

Fonction de distribution des bulles : $S_t^{(N)}(x,r) = \frac{1}{N}\sum_k \delta_{(X_k(t), NR_k(t))}(x,r)$

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle S_t^{(N)}, \beta\rangle = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\Big(\dot{X}_k \cdot \nabla_x \beta(X_k, NR_k) + N\dot{R}_k \partial_r \beta(X_k, NR_k)\Big)$
- $\dot{X}_k(t) = \tilde{u}^{(N)}(t, X_k)$ et $\Sigma_g = \mu_g \dfrac{\dot{R}_k}{R_k} - \mathrm{p}_g(\rho_g) - \dfrac{\bar{\gamma}_s}{2NR_k}$

Écoulements à bulles avec tension de surface

Passage à la limite $N \to +\infty$

Approche volumique

De la fonction indicatrice $\chi_g^{(N)} \in \{0,1\}$ à la probabilité de présence $\bar{\alpha}_g \in [0,1]$:

$$\chi_g^{(N)} \rightharpoonup \bar{\alpha}_g \quad L^\infty - w^*$$

$\rightsquigarrow$ EDP sur $\bar{\alpha}_g$: $\partial_t \bar{\alpha}_g + \mathrm{div}_x(\bar{\alpha}_g \bar{u}) = \dfrac{\bar{\alpha}_g}{\mu_g} \left(\bar{\Sigma}_g + \mathrm{p}_g(\bar{\rho}_g) + \bar{\gamma}_s \bar{f}_g\right)$

Approche "cinétique"

Fonction de distribution des bulles : $S_t^{(N)}(x,r) = \frac{1}{N}\sum_k \delta_{(X_k(t),NR_k(t))}(x,r)$

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle S_t^{(N)}, \beta\rangle = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\Big(\dot{X}_k \cdot \nabla_x \beta(X_k, NR_k) + N\dot{R}_k \partial_r \beta(X_k, NR_k)\Big)$
- $\dot{X}_k(t) = \tilde{u}^{(N)}(t, X_k)$ et $\Sigma_g = \mu_g \dfrac{\dot{R}_k}{R_k} - \mathrm{p}_g(\rho_g) - \dfrac{\bar{\gamma}_s}{2NR_k}$

$\rightsquigarrow$ Équation cinétique de Boltzmann–Williams

$$\partial_t \bar{S}_g(t,x,r) + \partial_x(\bar{S}_g \bar{u}) + \frac{1}{\mu_g}\partial_r((r(\bar{\Sigma}_g + \mathrm{p}_g(\bar{\rho}_g)) + \bar{\gamma}_s/2)\bar{S}_g) = 0$$

Écoulements à bulles avec tension de surface

Modèle macroscopique sur $(\bar\alpha_f, \bar\alpha_g \bar f_g, \bar\alpha_f\bar\rho_f, \bar\alpha_g\bar\rho_g, \bar\rho\bar u)(t,x)$

$$
\begin{cases}
\partial_t \bar\alpha_f + \bar u \partial_x \bar\alpha_f = \dfrac{\bar\alpha_g\bar\alpha_f}{\bar\alpha_f\mu_g + \bar\alpha_g\mu_f}\Big[(\mu_g - \mu_f)\partial_x \bar u + (\mathrm{p}_f(\bar\rho_f) - \mathrm{p}_g(\bar\rho_g)) - \bar\gamma_s \bar f_g\Big] \\
\partial_t(\bar\alpha_g \bar f_g) + \partial_x(\bar\alpha_g \bar f_g \bar u) = 0 \\
\partial_t(\bar\alpha_f\bar\rho_f) + \partial_x(\bar\alpha_f\bar\rho_f\bar u) = 0 \\
\partial_t(\bar\alpha_g\bar\rho_g) + \partial_x(\bar\alpha_g\bar\rho_g\bar u) = 0 \\
\partial_t(\bar\rho\bar u) + \partial_x(\bar\rho\bar u^2) = \dfrac{\mu_g\mu_f}{\bar\alpha_f\mu_g + \bar\alpha_g\mu_f}\left[\partial_x\bar u - \left(\dfrac{\bar\alpha_f}{\mu_f}\mathrm{p}_f(\bar\rho_f) + \dfrac{\bar\alpha_g}{\mu_g}\mathrm{p}_g(\bar\rho_g)\right) - \bar\gamma_s\dfrac{\bar\alpha_g}{\mu_g}\bar f_g\right]
\end{cases}
$$

Équation de Boltzmann–Williams sur $\bar S_g(t,x,r)$

$$
\partial_t \bar S_g + \partial_x(\bar S_g \bar u) + \frac{1}{\mu_g}\partial_r((r(\bar\Sigma + \mathrm{p}_g(\bar\rho_g)) + \bar\gamma_s/2)\bar S_g) = 0
$$

Travaux en cours

- Passage au cadre multidimensionnel et numérique... — Fabien Lespagnol
- Modèles d'ordre supérieur (troncature en N^{-k}) — Giscard Leonel Zouakeu
- Couplage micro/macro, lien avec les modèles de spray...

Modèles à deux vitesses

Dans certaines configurations "hétérogènes", il est nécessaire de considérer des vitesses de phases **distinctes**.

- Traînée peu importante
- Certains écoulements dispersés
- Interfaces // à l'écoulement (annulaires, stratifiés...)

Difficultés

- Écoulement non visqueux : peu ou pas d'échanges entre phases
  $\longrightarrow$ pas de modélisation des termes sources [Stewart,Wendroff 84]...
- Écoulement visqueux : continuité du champ de vitesse trop contraignant

Modèles à deux vitesses

Dans certaines configurations "hétérogènes", il est nécessaire de considérer des vitesses de phases **distinctes**.

- Traînée peu importante
- Certains écoulements dispersés
- Interfaces // à l'écoulement (annulaires, stratifiés...)

Difficultés

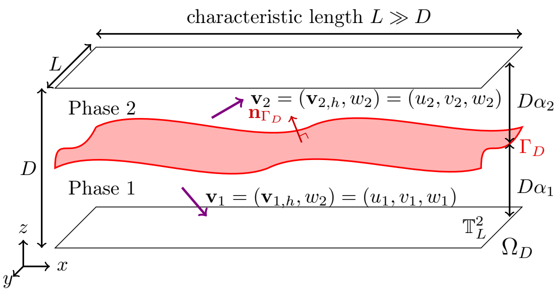
- Écoulement non visqueux : peu ou pas d'échanges entre phases
  $\longrightarrow$ pas de modélisation des termes sources [Stewart,Wendroff 84]...
- Écoulement visqueux : continuité du champ de vitesse trop contraignant

Cadre de l'étude

- Écoulement stratifié avec deux fluides visqueux
- Condition d'interface de type Navier
- Asymptotique de type film mince : 3D $\rightarrow$ 2D

Thèse de Pierrick Le Vourc'h (U. Montpellier, 2023) avec Khaled Saleh (Aix-Marseille)

Dérivation d'un modèle à deux vitesses : domaine



Écoulement stratifié avec deux fluides visqueux :

- Domaine $(\mathbf{x}, z) = (x, y, z) \in (0, L)^2 \times (0, D)$
- Interface : $\Gamma_D = \{\mathbf{x} \in (0, L)^2, z = D\alpha_1(t, X)\}$
- Domaine du fluide 1 : $\Omega_1 = \{\mathbf{x} \in (0, L)^2, z \in (0, D\alpha_1(t, X))\}$
- Domaine du fluide 2 : $\Omega_2 = \{\mathbf{x} \in (0, L)^2, z \in (D\alpha_1(t, X), D)\}$

Asymptotique de type film mince $L \gg D$: 3D $\to$ 2D

Équation cinématique sur l'interface :

$$\partial_t(D\alpha_1) + \left(\sqrt{|\nabla_h(D\alpha_1)|^2 + 1}\right)\mathbf{n}_{\Gamma_D} = 0$$

Équations de Navier-Stokes sur Ω_k :

$$\begin{aligned}
&\partial_t \rho_k + \mathrm{div}(\rho_k \mathbf{v}_k) = 0 \\
&\partial_t(\rho_k \mathbf{v}_k) + \mathrm{div}(\rho_k \mathbf{v}_k \otimes \mathbf{v}_k) + \nabla p_k(\rho_k) = \mathrm{div}\, \mathbb{S}_k \\
&\mathbb{S}_k = 2\mu_k \mathbb{D}_k(\mathbf{v}_k) + \lambda_k (\mathrm{div}\, \mathbf{v}_k)\mathbb{I}
\end{aligned}$$

Dérivation d'un modèle à deux vitesses : équations

Équation cinématique sur l'interface :

$$\partial_t(D\alpha_1) + \left(\sqrt{|\nabla_h(D\alpha_1)|^2 + 1}\right)\mathbf{n}_{\Gamma_D} = 0$$

Équations de Navier-Stokes sur Ω_k :

$$\begin{aligned}
&\partial_t \rho_k + \mathrm{div}(\rho_k \mathbf{v}_k) = 0\\
&\partial_t(\rho_k \mathbf{v}_k) + \mathrm{div}(\rho_k \mathbf{v}_k \otimes \mathbf{v}_k) + \nabla p_k(\rho_k) = \mathrm{div}\,\mathbb{S}_k\\
&\mathbb{S}_k = 2\mu_k \mathbb{D}_k(\mathbf{v}_k) + \lambda_k(\mathrm{div}\,\mathbf{v}_k)\mathbb{I}
\end{aligned}$$

Conditions aux bords (Navier) :

$$z = 0 : \begin{cases} w_1 = 0 \\ -\mathbb{S}_{1,hz} + \kappa_1 \mathbf{v}_{1,h} = 0 \end{cases} \qquad z = D : \begin{cases} w_2 = 0 \\ +\mathbb{S}_{2,hz} + \kappa_2 \mathbf{v}_{2,h} = 0 \end{cases}$$

où $\mathbb{S}_k = \begin{pmatrix} \mathbb{S}_{k,hh} & \mathbb{S}_{k,hz} \\ \mathbb{S}_{k,zh} & \mathbb{S}_{k,zz} \end{pmatrix}$

Dérivation d'un modèle à deux vitesses : équations

Équation cinématique sur l'interface :

$$\partial_t(D\alpha_1) + \left(\sqrt{|\nabla_h(D\alpha_1)|^2 + 1}\right)\mathbf{n}_{\Gamma_D} = 0$$

Équations de Navier-Stokes sur Ω_k :

$$\begin{aligned}
&\partial_t \rho_k + \operatorname{div}(\rho_k \mathbf{v}_k) = 0\\
&\partial_t(\rho_k \mathbf{v}_k) + \operatorname{div}(\rho_k \mathbf{v}_k \otimes \mathbf{v}_k) + \nabla p_k(\rho_k) = \operatorname{div} \mathbb{S}_k\\
&\mathbb{S}_k = 2\mu_k \mathbb{D}_k(\mathbf{v}_k) + \lambda_k(\operatorname{div} \mathbf{v}_k)\mathbb{I}
\end{aligned}$$

Conditions aux bords (Navier) :

$$z = 0 : \begin{cases} w_1 = 0 \\ -\mathbb{S}_{1,hz} + \kappa_1 \mathbf{v}_{1,h} = 0 \end{cases} \qquad z = D : \begin{cases} w_2 = 0 \\ +\mathbb{S}_{2,hz} + \kappa_2 \mathbf{v}_{2,h} = 0 \end{cases}$$

Conditions à l'interface Γ_D : $\quad \Sigma_k := -p_k(\rho_k)\mathbb{I} + \mathbb{S}_k$

$$z = D\alpha_1 : \begin{cases} \Sigma_1 \mathbf{n}_{\Gamma_D} = \Sigma_2 \mathbf{n}_{\Gamma_D} \qquad \Longrightarrow (\mathbb{S}_1 \mathbf{n}_{\Gamma_D})_{\tan} = (\mathbb{S}_2 \mathbf{n}_{\Gamma_D})_{\tan} \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_D} = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_D} \\ (\mathbb{S}_k \mathbf{n}_{\Gamma_D} + \kappa_i(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2))_{\tan} = 0 \end{cases}$$

Dérivation d'un modèle à deux vitesses : démarche

1. **Choix du régime** par rapport à $\varepsilon = D/L$: $W = \varepsilon U$
2. **Adimmensionnement** des équations en fonction de ε
   Par exemple

$$\partial_t(\rho_k \mathbf{v}_{k,h}) + \mathrm{div}_h(\rho_k \mathbf{v}_{k,h} \otimes \mathbf{v}_{k,h}) + \partial_z(\rho_k w_k \mathbf{v}_{k,h}) + \nabla_h p_k$$
$$= (\lambda_k + \mu_k)\nabla_h(\nabla \cdot \mathbf{v}_k) + \mu_k \Delta_h \mathbf{v}_{k,h} + \frac{\mu_k}{\varepsilon^2}\partial_{zz}\mathbf{v}k, h$$

$$\varepsilon\left(\partial_t(\rho_k w_k) + \mathrm{div}_h(\rho_k w_k \mathbf{v}_{k,h}) + \frac{1}{\varepsilon}\partial_z p_k\right)$$
$$= \frac{1}{\varepsilon}((\lambda_k + \mu_k)\partial_z(\nabla \cdot \mathbf{v}_k) + \mu_k \partial_{zz} w_k) + \mu_k \varepsilon \Delta_h w_k$$

3. **Moyennes verticales** : $\overline{f_1} = \dfrac{1}{\alpha_1}\displaystyle\int_0^{\alpha_1} f_1\ dz,\ \overline{f_2} = \dfrac{1}{\alpha_2}\displaystyle\int_{\alpha_1}^{1} f_2\ dz,\ \langle f_k \rangle = \dfrac{\overline{\rho_k f_k}}{\overline{\rho_k}}$
4. **On intègre les équations adimensionnées par rapport à z**
5. **On compare les termes en ε...**

Dérivation d'un modèle à deux vitesses : modèle asymptotique

On choisit les échelles suivantes :

$$\begin{cases} \mu_k = \widehat{\mu_k}\varepsilon^\tau, \ \lambda_k = \widehat{\lambda_k}\varepsilon^\tau, & 0 < \tau < 2 \\ \kappa_i = \widehat{\kappa_i}\varepsilon, \quad \kappa_k = \widehat{\kappa_k}\varepsilon^\xi, & \xi \geqslant 1 \end{cases}$$

Alors, les solutions du modèle stratifié initial vérifient

$$\begin{aligned} &\partial_t(\alpha_k\overline{\rho_k}) + \mathrm{div}_h(\alpha_k\overline{\rho_k}\langle \mathbf{v}_{k,h}\rangle) = 0 && \text{exactement} \\ &\partial_t(\alpha_k\overline{\rho_k}\langle \mathbf{v}_{k,h}\rangle) + \mathrm{div}_h(\alpha_k\overline{\rho_k}\langle \mathbf{v}_{k,h}\rangle \otimes \langle \mathbf{v}_{k,h}\rangle) + \alpha_k\nabla_h\overline{p_k} && \\ &\qquad = -\delta_\xi\widehat{\kappa_k}\langle \mathbf{v}_{k,h}\rangle + (-1)^k\widehat{\kappa_i}(\langle \mathbf{v}_{1,h}\rangle - \langle \mathbf{v}_{2,h}\rangle) && \varepsilon^\tau + \varepsilon^{2-\tau} + (1-\delta_\xi)\varepsilon^{\xi-1} \end{aligned}$$

avec

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

$$\begin{cases} \overline{p_k} = p_k(\overline{\rho_k}) \\ \overline{p_1} = \overline{p_2} \end{cases} \qquad \varepsilon^\tau$$

Modèle asymptotique bidimensionnel :

$$\partial_t(\alpha_k\overline{\rho_k}) + \mathrm{div}_h(\alpha_k\overline{\rho_k}\langle \mathbf{v}_{k,h}\rangle) = 0$$

$$\partial_t(\alpha_k\overline{\rho_k}\langle \mathbf{v}_{k,h}\rangle) + \mathrm{div}_h(\alpha_k\overline{\rho_k}\langle \mathbf{v}_{k,h}\rangle \otimes \langle \mathbf{v}_{k,h}\rangle) + \alpha_k\nabla_h\overline{p_k}$$
$$= -\delta_\xi\widehat{\kappa_k}\langle \mathbf{v}_{k,h}\rangle + (-1)^k\widehat{\kappa_i}(\langle \mathbf{v}_{1,h}\rangle - \langle \mathbf{v}_{2,h}\rangle)$$

$$\begin{cases} \overline{p_k} = p_k(\overline{\rho_k}) \\ \overline{p_1} = \overline{p_2} \end{cases}$$

- Modèle horizontal fermé
- Modèle à 2 vitesses et 1 pression
- Modèle à 1 vitesse et 1 pression si $\kappa_i = \widehat{\kappa}_i\varepsilon^\zeta$, $\zeta > 1$

Modèle asymptotique bidimensionnel :

$$\partial_t(\alpha_k\overline{\rho_k}) + \mathrm{div}_h(\alpha_k\overline{\rho_k}\langle \mathbf{v}_{k,h}\rangle) = 0$$
$$\partial_t(\alpha_k\overline{\rho_k}\langle \mathbf{v}_{k,h}\rangle) + \mathrm{div}_h(\alpha_k\overline{\rho_k}\langle \mathbf{v}_{k,h}\rangle \otimes \langle \mathbf{v}_{k,h}\rangle) + \alpha_k\nabla_h\overline{p_k}$$
$$= -\delta_\xi\widehat{\kappa_k}\langle \mathbf{v}_{k,h}\rangle + (-1)^k\widehat{\kappa_i}(\langle \mathbf{v}_{1,h}\rangle - \langle \mathbf{v}_{2,h}\rangle)$$
$$\begin{cases} \overline{p_k} = p_k(\overline{\rho_k}) \\ \overline{p_1} = \overline{p_2} \end{cases}$$

- Modèle horizontal fermé
- Modèle à 2 vitesses et 1 pression
- Modèle à 1 vitesse et 1 pression si $\kappa_i = \widehat{\kappa_i}\varepsilon^\zeta$, $\zeta > 1$
- Cadre avec énergies possible :

$$z = D\alpha_1 : \quad -\beta_k\nabla\theta_k \cdot \mathbf{n}_{\Sigma_D} = h_c(\theta_1 - \theta_2)$$

avec

$$\begin{cases} \beta_k = \widehat{\beta_k}\varepsilon^\gamma & 0 \leqslant \gamma < 2 \\ h_c = \widehat{h_c}\varepsilon \end{cases}$$