Schémas volumes finis positifs pour l'équation de diffusion sur maillages déformés

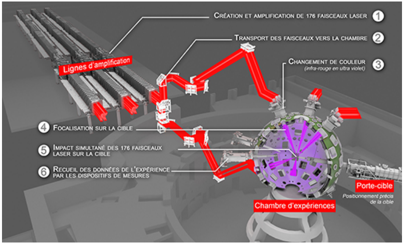
avec P. Anguill[2], F. Hermeline[2], E. Labourasse[2], J. Patela[2]

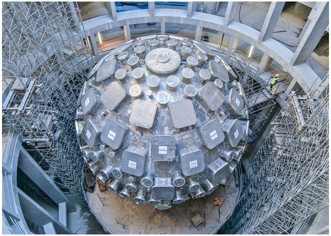
X. Blanc [1]

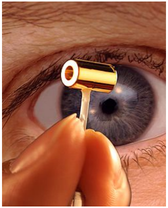
[1]Université Paris Cité

[2]CEA, DAM, DIF

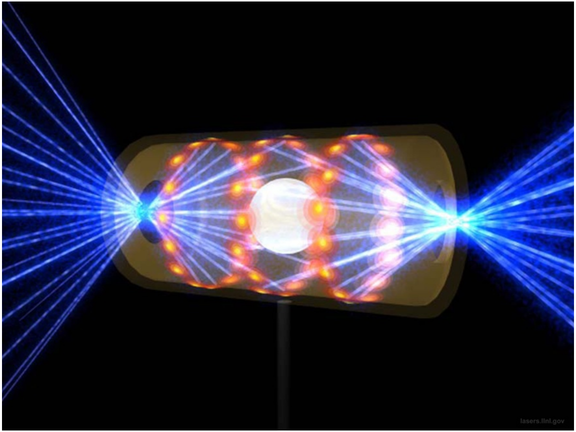
Laser Mégajoule



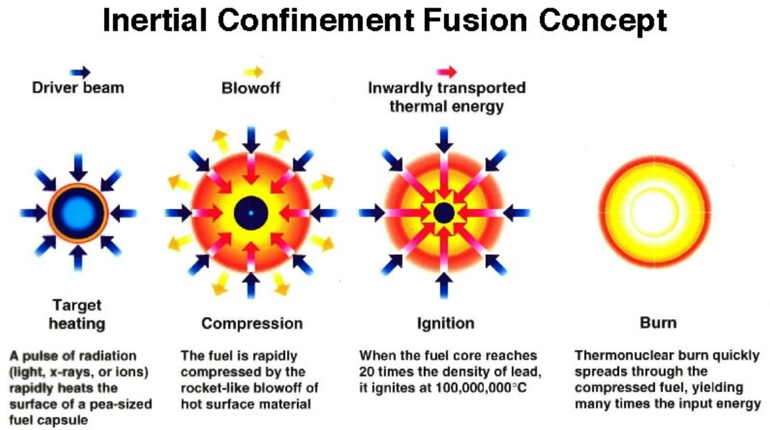




Fusion par confinement inertiel



Fusion par confinement inertiel



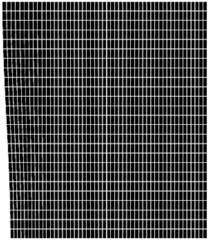
Modélisation

Couplage multi-physique:

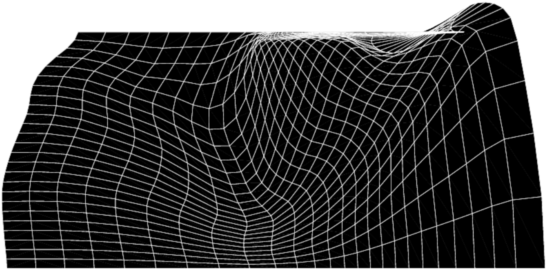
$$\begin{array}{ccccc}
 & & \boxed{\text{Laser – plasma}} & & \\
 & & \updownarrow & & \\
\boxed{\text{Réactions de fusion}} & \leftrightarrow & \boxed{\text{Hydrodynamique}} & \leftrightarrow & \boxed{\text{Neutronique}} \\
 & & \updownarrow & \nwarrow & \uparrow \\
 & & \boxed{\text{Transfert radiatif}} & \leftarrow & \boxed{\text{EOS, ctes physiques, ...}}
\end{array}$$

- Interaction laser-plasma
- Instabilités hydrodynamiques
- Particules supra-thermiques
- Hors-équilibre thermodynamique local
- Incertitudes
- ....

- Expériences de fusion par confinement inertiel (LMJ,NIF)
- Modèles physiques :
  - Hydrodynamique Lagrangienne (ou ALE)
  - Transfert radiatif (équation de diffusion)
- Parallélisme



- Expériences de fusion par confinement inertiel (LMJ,NIF)
- Modèles physiques :
  - Hydrodynamique Lagrangienne (ou ALE)
  - Transfert radiatif (équation de diffusion)
- Parallélisme



Equation de diffusion implicite :

$$-\Delta u + u = f$$

Les objectifs :

- Consistance
- Convergence (ordre 2 ?)
- Stabilité/robustesse
- Positivité/principe du maximum
- Conservativité

Les contraintes :

- Maillage déformé
- Volumes finis
- Parallélisation

- volumes finis (centrés) :
  - Kershaw, Pert (1981)
  - Faille (1992)
  - Morel, Dendy, Hall, White (1992)
  - Coudière, Vila, Villedieu (1999)
  - Jayantha, Turner (2001, 2003, 2005)
  - Bertolazzi, Manzini (2005)
- Eléments finis mixtes (hybrides) :
  - Raviart, Thomas (1977)
  - Burbeau, Roche, Scheurer, Samba (1997)
  - Arbogast, Wheeler, Yotov (1998)
- Discrete Duality Finite Volumes (DDFV):
  - Hermeline (1998, 2000, 2003,2007,2009)
  - Domelevo, Omnes (2005)
- Mimetic Finite Difference (MFD):
  - Shashkov, Steinberg, Morel, Lipnikov, Brezzi (1995, 1997, 1998, 2004).

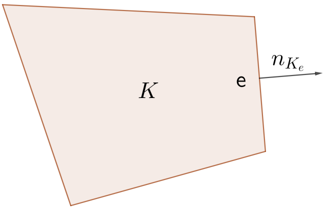
- Multi-point flux approximation (MPFA):
  - Aavatsmark, Barkve, Boe, Mannseth (1996, 1998)
  - Breil, Maire (2008)
- Scheme Using Stabilisation and Harmonic Interfaces (SUSHI):
  - Eymard, Gallouët, Herbin, 2010.
- Différences finies d'ordre élevé
  - Le Potier (2009)
- Maillages de Voronoï
  - Siess (2009)
- Volumes finis non linéaires
  - Droniou, Le Potier, Sheng, Yue, Yuan (2012, ...)
  - Sheng, Yuan (2011, ...)

Formulation volumes finis

Schéma volumes finis (maille K, faces e) :

$$\int_K u - \int_K \Delta u = \int_K f,$$

$$|K|u_K + \sum_{e\in\partial K}\left(-\int_e \nabla u \cdot n_{K_e}\right) = |K|f_K,$$



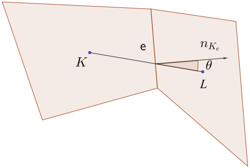
$\Rightarrow$ Approximation consistante de $\mathcal{F}_{K,e} = -\int_e \nabla u \cdot n_{K_e}.$

Première tentative

Le schéma le plus simple : $$\mathcal{F}_{K,e} = -\int_e \nabla u \cdot n_{K_e}.$$

Approximation du gradient sur la face e : $\nabla u \approx \frac{u(\mathbf{x}_L)-u(\mathbf{x}_K)}{|\mathbf{x}_L-\mathbf{x}_K|}\frac{\mathbf{x}_L-\mathbf{x}_K}{|\mathbf{x}_L-\mathbf{x}_K|}$,

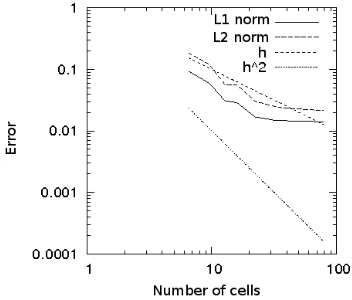
$$\nabla u \cdot n_{K_e} \approx \frac{u(\mathbf{x}_L)-u(\mathbf{x}_K)}{|\mathbf{x}_L-\mathbf{x}_K|}\frac{\mathbf{x}_L-\mathbf{x}_K}{|\mathbf{x}_L-\mathbf{x}_K|} \cdot n_{K_e} = \frac{u(\mathbf{x}_L)-u(\mathbf{x}_K)}{|\mathbf{x}_L-\mathbf{x}_K|}\cos(\theta),$$



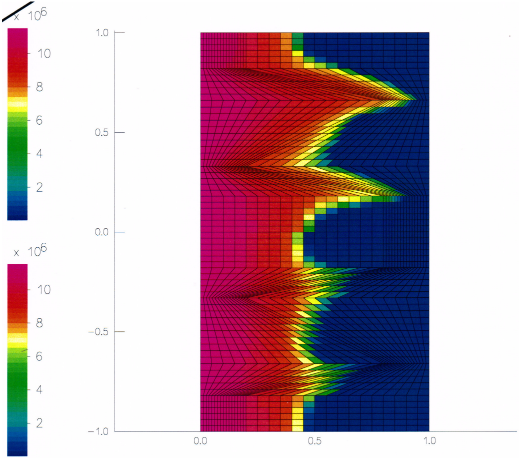
Première tentative

$$\mathcal{F}_{K,e} = -\int_e \nabla u \cdot n_{K_e} \approx |e| \frac{u_K - u_L}{|\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_L|} \cos(\theta).$$

- M-matrice : principe du maximum.
- non convergent sur maillage déformé

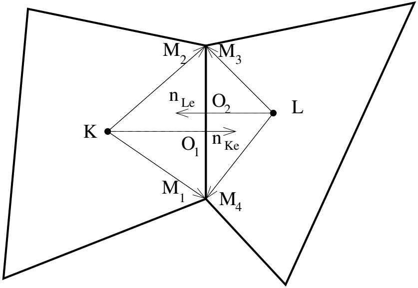


Première tentative



Deuxième tentative

Idée : utiliser des inconnues intermédiaires aux sommets pour calculer ∇u (donc le flux).



$$n_{K_e} = \alpha \frac{\overrightarrow{KM_1}}{\|\overrightarrow{KM_1}\|} + \beta \frac{\overrightarrow{KM_2}}{\|\overrightarrow{KM_2}\|}.$$

$$\mathcal{F}_{K,e} = -\int_e \left(\alpha \frac{\nabla u \cdot \overrightarrow{KM_1}}{\|\overrightarrow{KM_1}\|} + \beta \frac{\nabla u \cdot \overrightarrow{KM_2}}{\|\overrightarrow{KM_2}\|} \right)$$

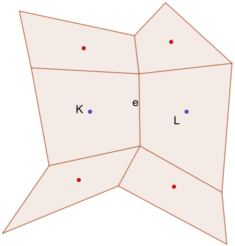
$$\approx -|e| \left(\alpha \frac{u_{M_1} - u_K}{\|\overrightarrow{KM_1}\|} + \beta \frac{u_{M_2} - u_K}{\|\overrightarrow{KM_2}\|} \right)$$

Valeurs aux sommets calculées par interpolation.

Deuxième tentative

Stencil à 9 points.

- Consistant, ordre 2.
- Perte du principe du maximum.



Deuxième tentative

Perte du principe du maximum.

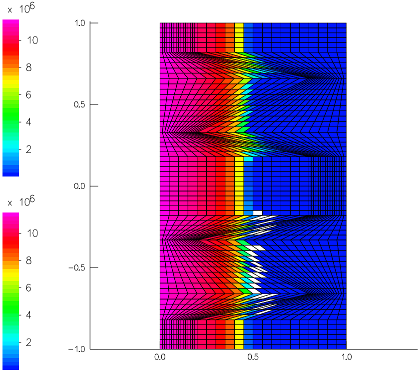
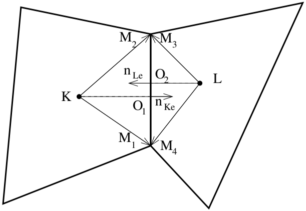


Schéma positif Yuan, Sheng, 2008

Pour chaque face, deux flux consistants :



$$F_1 = -|e|\kappa_e \left(\alpha_K \frac{u_{M_1} - u_K}{\|\overrightarrow{KM_1}\|} + \beta_K \frac{u_{M_2} - u_K}{\|\overrightarrow{KM_2}\|} \right),$$

$$F_2 = -|e|\kappa_e \left(\alpha_L \frac{u_{M_3} - u_L}{\|\overrightarrow{LM_3}\|} + \beta_L \frac{u_{M_4} - u_L}{\|\overrightarrow{LM_4}\|} \right).$$

On les combine pour en faire un flux à deux points :

$$F_{K,e} = \mu_1(u)F_1 - \mu_2(u)F_2,$$
$$F_{L,e} = \mu_2(u)F_2 - \mu_1(u)F_1,$$

$$
\begin{aligned}
F_{K,e} \quad = \quad & \mu_1 |e| \kappa_e \left(\alpha_K \frac{1}{\|\overrightarrow{KM_2}\|} + \beta_K \frac{1}{\|\overrightarrow{KM_1}\|} \right) u_K \\
& -\mu_2 |e| \kappa_e \left(\alpha_L \frac{1}{\|\overrightarrow{LM_4}\|} + \beta_L \frac{1}{\|\overrightarrow{LM_2}\|} \right) u_L \\
& -\mu_1 \underbrace{|e| \kappa_e \left(\alpha_K \frac{u_{M_2}}{\|\overrightarrow{KM_2}\|} + \beta_K \frac{u_{M_1}}{\|\overrightarrow{KM_1}\|} \right)}_{=a_1} \\
& +\mu_2 \underbrace{|e| \kappa_e \left(\alpha_L \frac{u_{M_4}}{\|\overrightarrow{LM_4}\|} + \beta_L \frac{u_{M_3}}{\|\overrightarrow{LM_3}\|} \right)}_{=a_2}
\end{aligned}
$$

Contraintes :

$$
\left\{ \begin{array}{lcl} \mu_1 + \mu_2 & = & 1, \\ a_1 \mu_1 - a_2 \mu_2 & = & 0. \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \mu_1 = \frac{a_2}{a_1 + a_2}, \quad \mu_2 = \frac{a_1}{a_1 + a_2}.
$$

$$F_{K,e} = A_{K,e} u_K - A_{L,e} u_L, \quad F_{L,e} = -F_{K,e},$$

$$A_{K,e} = \mu_1 |e| \kappa_e \left(\alpha_K \frac{1}{\|\overrightarrow{KM_2}\|} + \beta_K \frac{1}{\|\overrightarrow{KM_1}\|} \right), \quad \mu_1 = \frac{a_2}{a_1 + a_2},$$

$$A_{L,e} = \mu_2 |e| \kappa_e \left(\alpha_L \frac{1}{\|\overrightarrow{LM_4}\|} + \beta_L \frac{1}{\|\overrightarrow{LM_3}\|} \right), \quad \mu_2 = \frac{a_1}{a_1 + a_2}.$$

$$\begin{cases} a_1 = |e| \kappa_e \left(\alpha_K \frac{u_{M_2}}{\|\overrightarrow{KM_2}\|} + \beta_K \frac{u_{M_1}}{\|\overrightarrow{KM_1}\|} \right), \\ a_2 = |e| \kappa_e \left(\alpha_L \frac{u_{M_4}}{\|\overrightarrow{LM_4}\|} + \beta_L \frac{u_{M_3}}{\|\overrightarrow{LM_3}\|} \right). \end{cases} \qquad u_{M_i} = \max \left(0, \sum_{j \in V(M_j)} \omega_{M_i,j} u_{K_j} \right),$$

Flux à deux points non linéaire.

Equation

$$u - \Delta u = f.$$

Schéma

$$U + M(U)U = F,$$

$$[M(U)]_{KK} = \sum_{e \in K} A_{K,e},$$
$$[M(U)]_{KL} = -A_{L,e} \quad \text{si } K \neq L.$$

- $M(U)$ n'est pas symétrique.
- $M(U)^T$ est une M-matrice : schéma positif.
- $\sum$ coefficients d'une colonne $= 0$: schéma conservatif.

Algorithme

Schéma non linéaire $U + M(U)U = F$: point fixe

$$U^{n+1} + M(U^n)U^{n+1} = F.$$

- L'équation $U + M(U)U = F$ admet une solution.

Droniou, Le Potier, 2010

- Pour γ $(= \Delta t)$ assez petit, l'algorithme

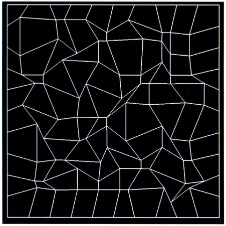
$$U^{n+1} + \gamma M(U^n)U^{n+1} = F$$

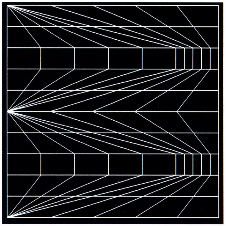
est convergent.

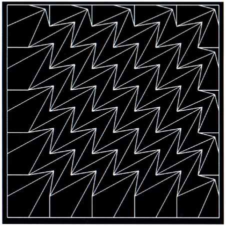
Etude de convergence

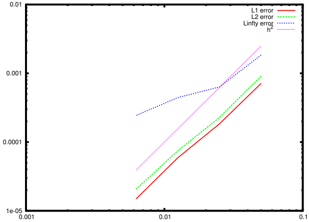
Problème avec solution analytique :

$$\begin{cases} -\Delta u = 2\pi^2 \cos(\pi x)\cos(\pi y) & \text{dans } \Omega =]0,1[\times]0,1[, \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_\Omega u = 2. & \end{cases}$$

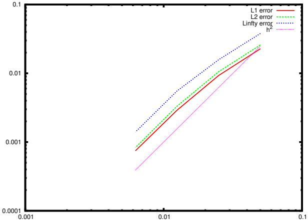




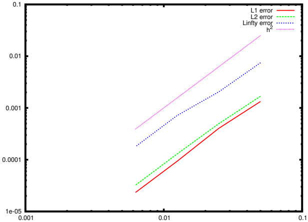




Maillage aléatoire



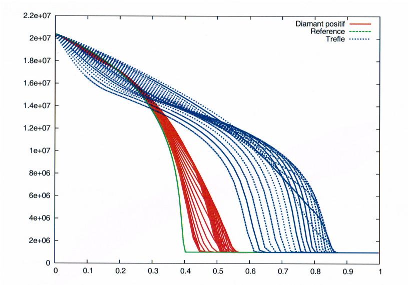
Maillage de Kershaw



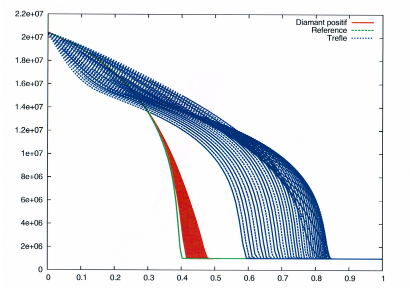
Maillage non convexe

Onde de Marshak

Onde de Marshak sur un maillage de Kershaw : $\partial_t u - \Delta u^p = 0$.
Solution explicite $u(x,t) = \left(\frac{t}{p} - x\right)_+^{1/p}$.



$\Delta x = 0.05$

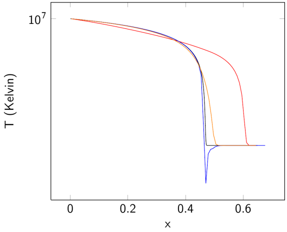


$\Delta x = 0.025$.

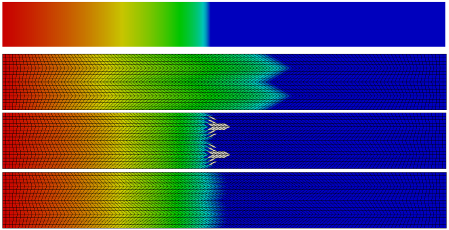
Onde de Marshak

Onde de Marshak sur un maillage de Kershaw : $\partial_t u - \Delta u^p = 0$.

Solution explicite $u(x,t) = \left(\frac{t}{p} - x\right)_+^{1/p}$.



$\Delta x = 0.05$

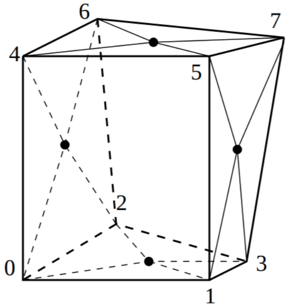


$\Delta x = 0.025$.

Dimension 3

Difficultés supplémentaires :

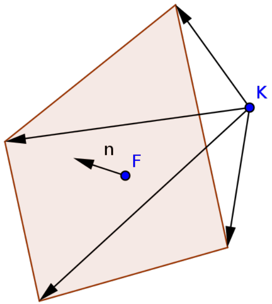
- Définition maille/face
- Base associée à une face
- Situations pathologiques



Dimension 3

Difficultés supplémentaires :

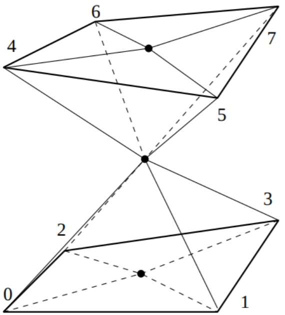
- Définition maille/face
- Base associée à une face
- Situations pathologiques



Dimension 3

Difficultés supplémentaires :

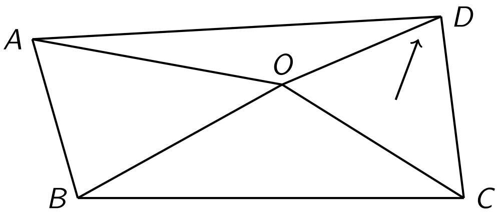
- Définition maille/face
- Base associée à une face
- Situations pathologiques



Géométrie

Définitions :

- Centre d'une face e : isobarycentre des sommets.
- Face : union des triangles définis par le centre et une arête.
- Normale effective $n_e = \int_e ndS$.



Volumes finis

Schéma volumes finis (maille K, faces e) :

$$\int_K u - \int_K \Delta u = \int_K f,$$

$$|K| u_K + \sum_{e \in \partial K} \left(- \int_e \nabla u \cdot n_{K_e} \right) = |K| f_K,$$

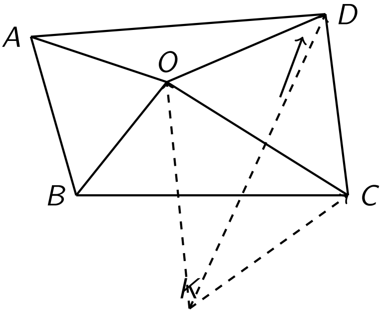
$\Rightarrow$ Approximation consistante de $\mathcal{F}_{K,e} = - \int_e \nabla u \cdot n_{K_e}.$

Volumes finis

Somme sur les triangles d'une face :

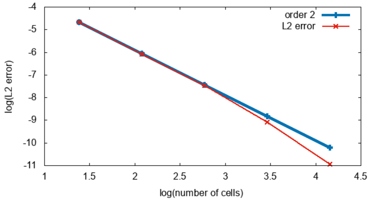
$$\mathcal{F}_{K,e} = -\int_e \nabla u \cdot n = -\sum_T (\nabla u)_T \, n_T.$$

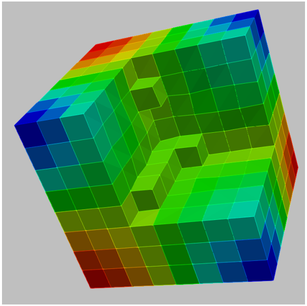
- décomposition n_T
- différences finies
- combinaison de flux



Cas tests

Un cas de convergence : $u(x, y, z) = 1 + \cos(\pi x)\cos(\pi y)\cos(\pi z)$.
Maillage aléatoire.

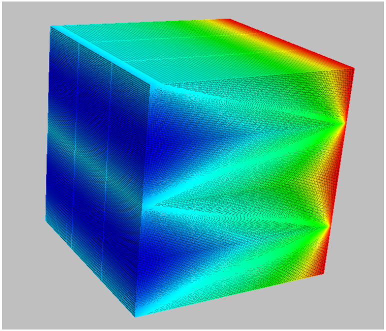


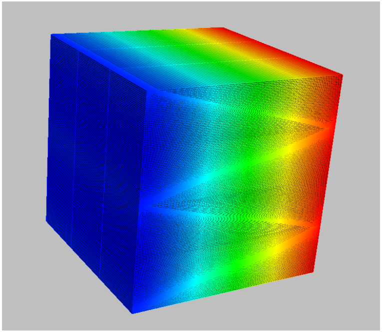


Cas tests

Onde de Marshak sur un maillage de Kershaw : $\partial_t u - \Delta u^p = 0$.

Solution explicite $u(x,t) = \left(\frac{t}{p} - x\right)_+^{1/p}$.





Consistance

Dimension 1 : ordre 2 consistant => On regarde l'ordre élevé.

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{dans} \quad \Omega =]0,1[, \\ u = g & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

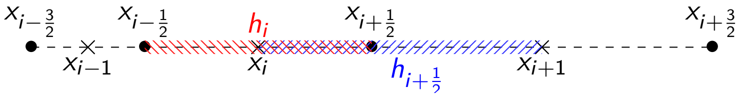
Schéma :

- d'ordre élevé (≥ 3)
- positif
- conservatif

B. Després, *Non linear schemes for the heat equation in 1D*, M2AN, 2014.

Ordre élevé

$$-u'' + u = f.$$



Méthode volumes finis :

$$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}} + h_i u_i = h_i f_i.$$

Flux

$$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} = -u'(x_{i+\frac{1}{2}})$$

Flux d'ordre élevé

Développements de Taylor intégrés au voisinage de $x_{i+\frac{1}{2}}$

$$u_{i+1} = u(x_{i+\frac{1}{2}}) + \frac{h_{i+1}}{2} u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + \sum_{\ell=2}^{k} \frac{h_{i+1}^{\ell}}{(\ell+1)!} u^{(\ell)}(x_{i+\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}\left(h_{i+1}^{k+1}\right),$$

$$u_i = u(x_{i+\frac{1}{2}}) - \frac{h_i}{2} u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + \sum_{\ell=2}^{k} \frac{(-1)^{\ell} h_i^{\ell}}{(\ell+1)!} u^{(\ell)}(x_{i+\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}\left(h_i^{k+1}\right).$$

Soustraction :

$$u'(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}}(u_{i+1}-u_i) \underbrace{- \sum_{\ell=2}^{k} \frac{h_{i+1}^{\ell} + (-1)^{\ell} h_i^{\ell}}{h_{i+\frac{1}{2}}(\ell+1)!} u^{(\ell)}(x_{i+\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}\left(h^{k}\right)}_{r_{i+\frac{1}{2}}}.$$

Flux exact $$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}}(u_{i+1} - u_i) + r_{i+\frac{1}{2}}.$$

Calcul des flux

Evaluation des dérivées $u^{(\ell)}(x_{i+\frac{1}{2}})$: reconstruction polynomiale

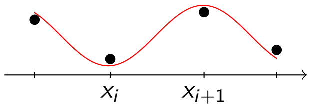
Polynôme de degré k : $k+1$ mailles voisines de $x_{i+\frac{1}{2}}$.

$$P(x) = a_k(u_0, \ldots u_k)x^k + \ldots + a_0(u_0, \ldots u_k).$$

Contraintes

$$\frac{1}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} P(x) = u_i.$$

$$u^{(\ell)}|_{i+\frac{1}{2}} \approx P^{(\ell)}(x_{i+\frac{1}{2}}).$$



Positivité

Une astuce de Y. Gao et al. [1] pour assurer la positivité

$$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}}(u_{i+1} - u_i) + r_{i+\frac{1}{2}}.$$

Partie positive et partie négative :

$$r_{i+\frac{1}{2}} = r^+_{i+\frac{1}{2}} - r^-_{i+\frac{1}{2}}, \qquad r^+_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\left|r_{i+\frac{1}{2}}\right| + r_{i+\frac{1}{2}}}{2} \geq 0, \quad r^-_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\left|r_{i+\frac{1}{2}}\right| - r_{i+\frac{1}{2}}}{2} \geq 0.$$

Réécriture des flux

$$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} = -\left(\frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{r^-_{i+\frac{1}{2}}}{u_{i+1}}\right) u_{i+1} + \left(\frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{r^+_{i+\frac{1}{2}}}{u_i}\right) u_i.$$

Coefficients positifs (M-matrice), non linéarité.

[1] Y. Gao, G. Yuan, S. Wang, X. Hang, *A finite volume element scheme with a monotonicity correction for anisotropic diffusion problems on general quadrilateral meshes*, Journal of Computational Physics, 2020.

Propriétés du schéma

- Conservativité
- Positivité
- Consistance des flux à l'ordre k
- Convergence à l'ordre $k-1$ sous hypothèse de stabilité

Schéma d'ordre élevé $Au = f$: solution $\overline{u}$.
Version non linéaire positive $B(u)u = f$: solution u (point fixe).

- Si $u > 0$, alors $\overline{u} = u$ (unique) solution positive.
- Sinon, $u \geq 0$ (pas "solution" de $B(u)u = f$).

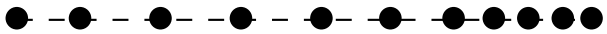
Tests numériques

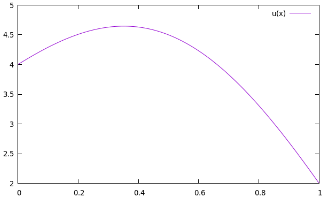
$$\begin{cases} -\left(\kappa u'\right)' = f & \text{dans } \Omega =]0,1[, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

$$\kappa(x) = \exp(x).$$

Solution analytique

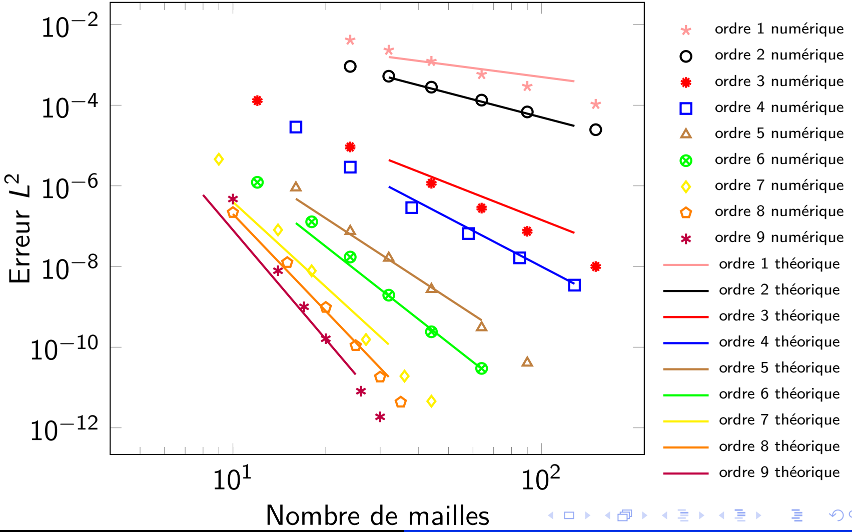
$$u(x) = \sin(\pi x) - 2x^2 + 4,$$





$$\begin{cases} f(x) = 4\exp(x) + 4x\exp(x) - \pi\cos(\pi x)\exp(x) + \pi^2\exp(x)\sin(\pi x) \geq 0, \\ g(0) = 4 \geq 0 \quad \text{et} \quad g(1) = 2 \geq 0. \end{cases}$$

Convergence L2



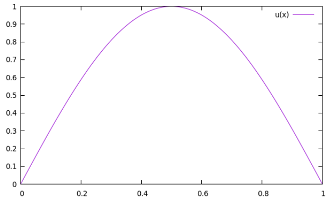
Tests numériques : positivité

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{dans } \Omega =]0,1[, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

$$f(x) = \pi^2 \sin(\pi x) \geq 0 \text{ dans } \Omega.$$

Solution analytique

$$u(x) = \sin(\pi x),$$



Tests numériques : positivité

Nombre de mailles	Schéma monotone	Schéma non monotone
8	0	5
16	0	4
32	0	2
64	0	2
128	0	3

Table: Comparaison du nombre de composantes négatives des schémas monotone et non-monotone, sur maillage déformé, à l'ordre 3.

Maillage primal

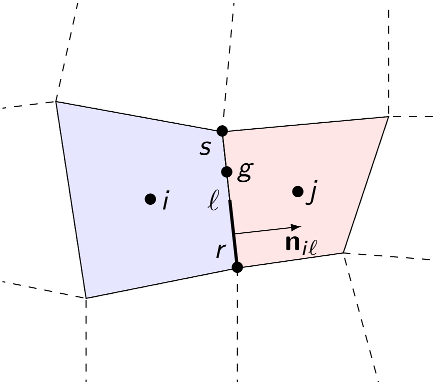


Figure: Maillage primal

- r et s : sommets,
- ℓ : arête du maillage primal, de mesure $|\ell|$,
- i et j : mailles,
- g : point de quadrature de Gauss sur l'arête ℓ,
- $\mathbf{x}_r$: position du sommet r,
- $\mathbf{x}_j$: position du centre de gravité de la maille j,
- $\mathbf{x}_\ell$: position du centre de l'arête ℓ,
- V_j : volume de la maille j.
- $\mathbf{n}_{i\ell}$: normale unitaire à l'arête ℓ, sortante pour la maille i.

Maillage dual

Méthode DDFV (Discrete Duality Finite Volume)[1]

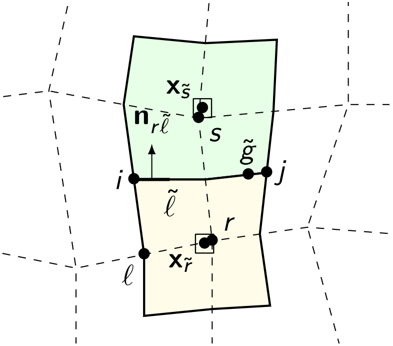


Figure: Maillage dual aux sommets

- r et s : mailles
- i,j et ℓ : sommets,
- $\tilde{\ell}$: arête du maillage dual, de mesure $|\tilde{\ell}|$,
- $\tilde{g}$: point de quadrature des Gauss sur l'arête $\tilde{\ell}$,
- $\mathbf{x}_r$: position du sommet r,
- $\mathbf{x}_{\tilde{r}}$: position du centre de gravité de la maille duale r,
- V_r : volume de la maille r,
- $\mathbf{n}_{r\tilde{\ell}}$: normale unitaire à l'arête $\tilde{\ell}$, sortante pour la maille r.

[1] Jean-Sylvain Camier, François Hermeline, International journal for numerical methods in engineering, 2016.

Problème

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Méthode volumes finis

$$-\sum_{\ell \in \partial i} \int_{\ell} \kappa \nabla u \cdot \mathbf{n} = \int_i f.$$

Méthode de quadrature

$$-\sum_{\ell \in \partial i} |\ell| \sum_{g \in \ell} \omega_g \kappa_g \left(\nabla u\right)_g \cdot \mathbf{n}_{i\ell} \approx \int_i f,$$

avec ω_g les poids de la quadrature de Gauss.
Calcul des flux

$$\bar{\mathcal{F}}_\ell = -\sum_{g \in \ell} \omega_g \kappa_g \left(\nabla u\right)_g \cdot \mathbf{n}_{i\ell}.$$

Calcul des flux

Développements de Taylor à l'ordre k au voisinage de $\mathbf{x}_g$

$$
\begin{aligned}
u_j &= u(\mathbf{x}_g) + (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_g)\cdot\nabla u(\mathbf{x}_g) \\
&+ \sum_{p=2}^{k}\frac{1}{V_j p!}\sum_{m=0}^{p}\binom{p}{p-m}\frac{\partial^p u}{\partial x^m \partial y^{(p-m)}}(\mathbf{x}_g)\int_j (x-x_g)^m (y-y_g)^{(p-m)} + \mathcal{O}\left(h^{k+1}\right), \\
u_i &= u(\mathbf{x}_g) + (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_g)\cdot\nabla u(\mathbf{x}_g) \\
&+ \sum_{p=2}^{k}\frac{1}{V_i p!}\sum_{m=0}^{p}\binom{p}{p-m}\frac{\partial^p u}{\partial x^m \partial y^{(p-m)}}(\mathbf{x}_g)\int_i (x-x_g)^m (y-y_g)^{(p-m)} + \mathcal{O}\left(h^{k+1}\right).
\end{aligned}
$$

On soustrait :

$$(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)\cdot\nabla u(\mathbf{x}_g) = u_j - u_i + r_{ij},$$

$$r_{ij} = -\sum_{p=2}^{k}\frac{1}{p!}\sum_{m=0}^{p}\binom{p}{p-m}\frac{\partial^p u(\mathbf{x}_g)}{\partial x^m \partial y^{(p-m)}}\left(\frac{1}{V_j}\int_j (x-x_g)^m (y-y_g)^{(p-m)} - \frac{1}{V_i}\int_i (x-x_g)^m (y-y_g)^{(p-m)}\right) + \mathcal{O}\left(h^{k+1}\right).$$

Calcul des flux

Même méthode sur les mailles duales

$$(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_r) \cdot \nabla u(\mathbf{x}_g) = u_s - u_r + r_{rs},$$

$$r_{rs} = -\sum_{p=2}^{k} \frac{1}{p!} \sum_{m=0}^{p} \binom{p}{p-m} \frac{\partial^p u(\mathbf{x}_g)}{\partial x^m \partial y^{(p-m)}} \left(\frac{1}{V_s} \int_s (x - x_g)^m (y - y_g)^{(p-m)} - \frac{1}{V_r} \int_r (x - x_g)^m (y - y_g)^{(p-m)} \right) + \mathcal{O}\left(h^{k+1}\right).$$

Système d'inconnue $\nabla u(\mathbf{x}_g)$

$$\begin{cases} \nabla u(\mathbf{x}_g) \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) = u_j - u_i + \bar{r}_{ij}, \\ \nabla u(\mathbf{x}_g) \cdot (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_r) = u_s - u_r + \bar{r}_{rs}. \end{cases}$$

Décomposition de la normale $\mathbf{n}_{i\ell}$ dans la base $((\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i), (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_r))$

$$\mathbf{n}_{i\ell} = \alpha_{i\ell}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) + \beta_{i\ell}(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_r),$$

avec $\alpha_{i\ell} \geq 0$.

$$(\nabla u)_g \cdot \mathbf{n}_{i\ell} = \alpha_{i\ell}\left(u_j - u_i + r_{ij}(\mathbf{u})\right) + \beta_{i\ell}\left(u_s - u_r + r_{rs}(\mathbf{u})\right).$$

Calcul des flux

Inconnues mailles-sommets : $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{\mathcal{J}} \\ \mathbf{u}^{\mathcal{R}} \end{pmatrix}$.

Flux numérique :

$$\mathcal{F}_\ell(\mathbf{u}) = -|\ell| \sum_{g\in\ell} \omega_g \kappa_g \left(\alpha_{i\ell}\left(u_j - u_i + r_{ij}(\mathbf{u})\right) + \beta_{i\ell}\left(u_s - u_r + r_{rs}(\mathbf{u})\right)\right),$$

Autrement dit

$$\mathcal{F}_\ell(\mathbf{u}) = -\gamma_\ell(u_j - u_i) + r_\ell(\mathbf{u}),$$

avec

$$\begin{cases} r_\ell(\mathbf{u}) = |\ell| \displaystyle\sum_{g\in\ell} \omega_g \kappa_g \left(\alpha_{i\ell} r_{ij}(\mathbf{u}) + \beta_{i\ell}(u_s - u_r + r_{rs}(\mathbf{u}))\right), \\ \gamma_\ell = \left(\alpha_{i\ell}|\ell| \displaystyle\sum_{g\in\ell} \omega_g \kappa_g\right) \geq 0. \end{cases}$$

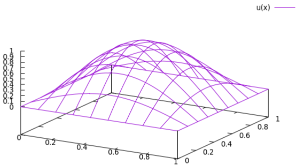
Tests numériques

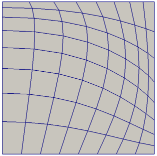
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega =]0,1[\times]0,1[, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

$$f(x,y) = 2\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y) \geq 0.$$

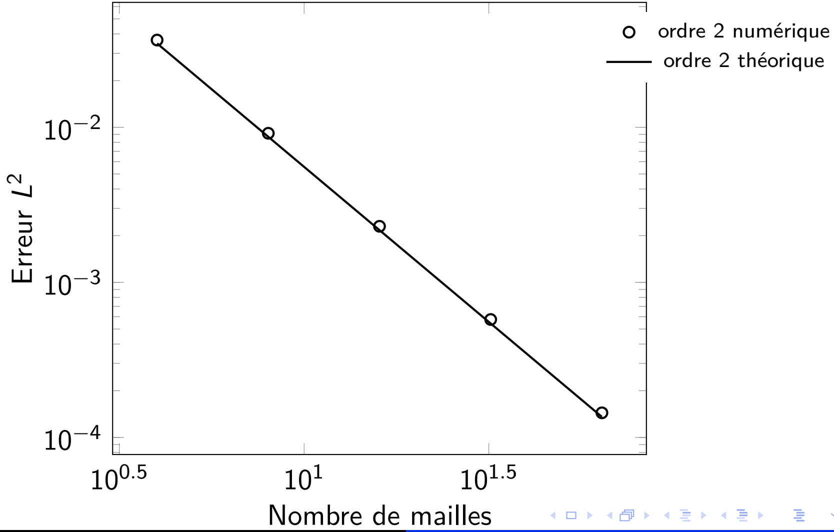
Solution analytique

$$u(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y),$$





Convergence L2 sur le maillage primal



Conclusion : schéma volumes finis sur maillage déformé :

- conservatif
- positif
- consistant (ordre élevé).

Perspectives :

- Ordre élevé en 2D.
- Inconnue tensorielle.
- Discrétisation en temps.